

COLLECTION IRIS

Sous la direction de **Nicolas Puech**

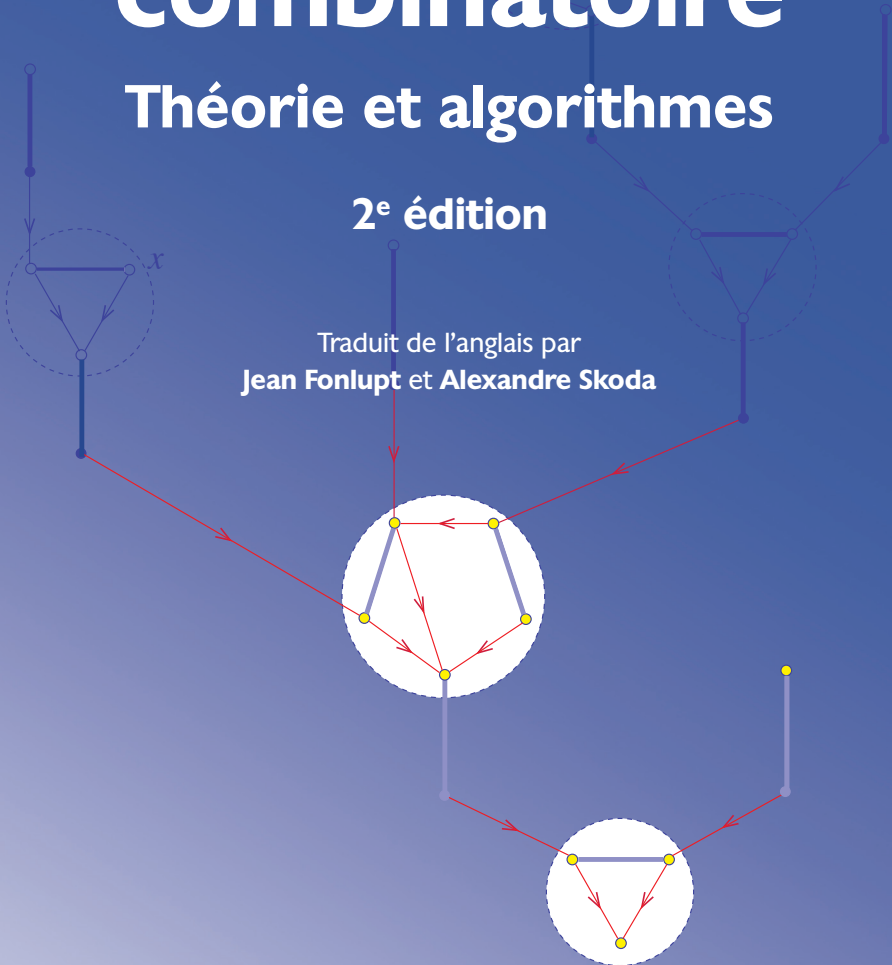
Bernhard Korte
Jens Vygen

Optimisation combinatoire

Théorie et algorithmes

2^e édition

Traduit de l'anglais par
Jean Fonlupt et **Alexandre Skoda**



Lavoisier
hermes

Collection IRIS
Dirigée par Nicolas Puech

Bernhard Korte
Jens Vygen

Optimisation combinatoire

Théorie et algorithmes

2^e édition

Traduit de l'anglais par
Jean Fonlupt et **Alexandre Skoda**

Lavoisier
hermes

editions.lavoisier.fr

Direction scientifique : Nicolas Puech
Direction éditoriale : Emmanuel Leclerc
Édition : Céline Poiteaux
Fabrication : Estelle Perez
Couverture : Isabelle Godenèche
Mise en pages : Nord Compo, Villeneuve-d'Ascq

© 2018, Lavoisier, Paris
ISBN : 978-2-7462-4782-6

Préface de la deuxième édition française

Cette édition française correspond à la cinquième édition anglaise du livre *Combinatorial Optimization : Theory and Algorithms* écrit par deux éminents spécialistes, Bernhard Korte et Jens Vygen, professeurs à l'université de Bonn. Considéré comme un ouvrage de référence, il s'adresse à des chercheurs confirmés qui travaillent dans le champ de la recherche fondamentale ou de ses applications (R&D). Il donne une vision complète de l'optimisation combinatoire et peut donc aussi intéresser de nombreux scientifiques non spécialistes ayant une bonne culture en mathématiques et des connaissances de base en informatique.

L'optimisation combinatoire est un domaine assez récent des mathématiques appliquées, qui plonge ses racines dans la combinatoire (principalement la théorie des graphes), la recherche opérationnelle et l'informatique théorique. Une des raisons de son développement est liée au nombre considérable de problèmes concrets qu'elle permet de formuler. Il s'agit en grande partie de problèmes pour lesquels on connaît de « bons » algorithmes de résolution ; ceux-ci sont étudiés dans la première partie de ce livre. Une des originalités de cet ouvrage, par rapport à d'autres traités, est de présenter les algorithmes de résolution ayant la meilleure borne de complexité connue à ce jour.

La seconde partie traite des problèmes difficiles à résoudre sur le plan algorithmique et connus sous le nom de problèmes *NP-difficiles*. Le plus connu d'entre eux, celui du voyageur de commerce, fait l'objet au chapitre 21 d'une étude particulièrement approfondie. D'autres tout aussi importants, comme les problèmes de conception de réseaux, de multi-flots, de localisation d'installations, etc., bénéficient également d'une présentation détaillée, ce qui est peu fréquent dans la littérature et mérite d'être signalé.

Dans cette nouvelle édition, deux nouveaux problèmes sont étudiés : celui de la *coupe dispersée* et celui du *sac à dos multidimensionnel* ; de nouveaux exercices sont proposés et un certain nombre de résultats font l'objet d'une nouvelle présentation. Dans la traduction que nous proposons, nous avons cherché à traduire en français toutes les expressions et tous les termes anglo-saxons même quand aucune traduction n'existait ; il y a cependant quelques exceptions pour des termes très techniques qui ne sont universellement connus que sous leur dénomination anglaise.

Avant-propos à la cinquième édition originale

En préparant la première édition de ce livre, il y a plus de dix ans, nous avons voulu atteindre deux objectifs : écrire un traité pour des enseignements de niveau avancé et écrire un livre de référence pour la recherche. À l'occasion de chaque nouvelle édition nous nous sommes demandé comment améliorer l'ouvrage, sachant qu'il est de plus en plus délicat de décrire de manière intelligible cette discipline en croissance permanente.

Si nous avons inclus tout ce que nous souhaitions développer, plus d'un volume aurait été nécessaire. Comme ce livre est utilisé dans de nombreux enseignements, parfois même au niveau licence, nous avons pensé qu'il était préférable d'ajouter des résultats classiques plutôt que d'inclure une sélection de nouveaux résultats.

Dans cette édition, nous avons ajouté une preuve de la formule de Cayley ainsi que plus de détails sur les flots, un nouvel algorithme plus rapide pour le b -couplage, un schéma d'approximation pour le problème du sac à dos multidimensionnel, et des résultats sur le ratio flot-max coupe-min pour le multiflot et pour le problème de la coupe dispersée. Il y a aussi de nombreuses améliorations et plus de soixante nouveaux exercices. Nous avons également mis à jour les références afin de présenter les résultats les plus récents et nous avons corrigé quelques erreurs mineures.

Nous voudrions remercier Takao Asano, Maxim Babenko, Ulrich Brenner, Benjamin Bolten, Christoph Buchheim, Jean Fonlupt, András Frank, Michael Gester, Stephan Held, Stefan Hougardy, Hirosh Iida, Klaus Jensen, Alexander Karzanov, Levin Keller, Alexander Kleff, Niko Klewinghaus, Stefan Knauf, Barbara Langfeld, Jens Maßberg, Marc Pfetsch, Klaus Radke, Rabe von Randow, Tomás Salles, Jan Schneider, Christian Schulte, Andras Sebő, Martin Skutella, Jácint Szabó et Simon Wedekind pour leurs précieux retours sur les éditions précédentes.

Nous sommes heureux que ce livre ait reçu un si bon accueil et que de nouvelles traductions soient prévues. Des traductions de l'ouvrage en japonais, français, italien, allemand, russe et chinois sont parues depuis 2009 ou sont sur le point de paraître. Nous espérons que ce livre continuera à remplir ses objectifs pour l'enseignement et la recherche en optimisation combinatoire.

Sommaire

Préface de la deuxième édition française	vii
Avant-propos à la cinquième édition originale	ix
Sommaire	xi
1 Introduction	1
1.1 Énumération	2
1.2 Temps d'exécution des algorithmes	5
1.3 Problèmes d'optimisation linéaire	8
1.4 Tri	9
Exercices	11
Références	12
2 Graphes	13
2.1 Définitions fondamentales	13
2.2 Arbres, cycles, coupes	17
2.3 Connexité	24
2.4 Graphes eulériens et bipartis	30
2.5 Planarité	33
2.6 Dualité planaire	40
Exercices	43
Références	47
3 Programmation linéaire	49
3.1 Polyèdres	50
3.2 Algorithme du simplexe	54
3.3 Implémentation de l'algorithme du simplexe	57
3.4 Dualité	60
3.5 Enveloppes convexes et polytopes	64
Exercices	65
Références	67
4 Algorithmes de programmation linéaire	71
4.1 Taille des sommets et des faces	72
4.2 Fractions continues	74
4.3 Méthode d'élimination de Gauss	76

4.4	Méthode des ellipsoïdes	80
4.5	Théorème de Khachiyan	86
4.6	Séparation et optimisation	87
	Exercices	94
	Références	95
5	Programmation en nombres entiers	97
5.1	Enveloppe entière d'un polyèdre	99
5.2	Transformations unimodulaires	103
5.3	Totale duale-intégralité	104
5.4	Matrices totalement unimodulaires	108
5.5	Plans coupants	112
5.6	Relaxation lagrangienne	117
	Exercices	119
	Références	122
6	Arbres couvrants et arborescences	125
6.1	Arbre couvrant de poids minimum	126
6.2	Arborescence de poids minimum	132
6.3	Descriptions polyédrales	136
6.4	Empilements d'arbres et d'arborescences	139
	Exercices	142
	Références	146
7	Plus courts chemins	151
7.1	Plus courts chemins à partir d'une source	152
7.2	Plus courts chemins entre toutes les paires de sommets	156
7.3	Circuit moyen minimum	158
	Exercices	161
	Références	163
8	Flots dans les réseaux	167
8.1	Théorème flot-max/coupe-min	168
8.2	Théorème de Menger	171
8.3	Algorithme d'Edmonds-Karp	174
8.4	Algorithmes de Dinic, Karzanov et Fujishige	175
8.5	Algorithme de Goldberg-Tarjan	179
8.6	Arbres de Gomory-Hu	183
8.7	Capacité minimum d'une coupe dans un graphe non orienté	189
	Exercices	192
	Références	198
9	Flots de coût minimum	203
9.1	Formulation du problème	203
9.2	Un critère d'optimalité	205
9.3	Algorithme par élimination du circuit moyen minimum	208
9.4	Algorithme par plus courts chemins successifs	211
9.5	Algorithme d'Orlin	214

9.6	Algorithme network simplex	219
9.7	Flots dynamiques	222
	Exercices	224
	Références	228
10	Couplage maximum	231
10.1	Couplage dans les graphes bipartis	232
10.2	Matrice de Tutte	234
10.3	Théorème de Tutte	236
10.4	Décompositions en oreilles des graphes facteur-critiques	239
10.5	Algorithme du couplage d'Edmonds	244
	Exercices	253
	Références	257
11	Couplage avec poids	261
11.1	Problème d'affectation	262
11.2	Aperçu de l'algorithme du couplage avec poids	264
11.3	Implémentation de l'algorithme du couplage avec poids	267
11.4	Postoptimalité	279
11.5	Polytope du couplage	280
	Exercices	283
	Références	285
12	b-couplages et T-joints	289
12.1	b -couplages	289
12.2	T -joints de poids minimum	293
12.3	T -joints et T -coupes	297
12.4	Théorème de Padberg-Rao	301
	Exercices	303
	Références	307
13	Matroïdes	309
13.1	Systèmes d'indépendance et matroïdes	309
13.2	Autres axiomes	313
13.3	Dualité	318
13.4	Algorithme glouton	322
13.5	Intersection de matroïdes	327
13.6	Partition de matroïdes	331
13.7	Intersection de matroïdes avec poids	333
	Exercices	337
	Références	340
14	Généralisations des matroïdes	343
14.1	Greedoïdes	343
14.2	Polymatroïdes	347
14.3	Minimisation de fonctions sous-modulaires	351
14.4	Algorithme de Schrijver	353
14.5	Fonctions sous-modulaires symétriques	357

Exercices	359
Références	362
15 NP-complétude	365
15.1 Machines de Turing	366
15.2 Thèse de Church	368
15.3 P et NP	373
15.4 Théorème de Cook	377
15.5 Quelques problèmes NP -complets de base	381
15.6 Classe $coNP$	388
15.7 Problèmes NP -difficiles	390
Exercices	395
Références	399
16 Algorithmes d'approximation	403
16.1 Couverture par des ensembles	404
16.2 Problème de la coupe-max	409
16.3 Coloration	415
16.4 Schémas d'approximation	422
16.5 Satisfaisabilité maximum	425
16.6 Théorème PCP	430
16.7 L-réductions	434
Exercices	440
Références	444
17 Le problème du sac à dos	449
17.1 Sac à dos fractionnaire et problème du médian pondéré	449
17.2 Un algorithme pseudo-polynomial	452
17.3 Un schéma d'approximation entièrement polynomial	454
17.4 Sac à dos multidimensionnel	457
Exercices	458
Références	459
18 Le problème du bin-packing	461
18.1 Heuristiques gloutonnes	462
18.2 Un schéma d'approximation asymptotique	467
18.3 Algorithme de Karmarkar-Karp	471
Exercices	474
Références	476
19 Multiflots et chaînes arête-disjointes	479
19.1 Multiflots	480
19.2 Algorithmes pour le multiflot	484
19.3 La coupe dispersée et le ratio flot-max coupe-min	489
19.4 Le théorème de Leighton-Rao	490
19.5 Problème des chemins arc-disjointes	493
19.6 Problème des chaînes arête-disjointes	497
Exercices	502
Références	507

20 Problèmes de conception de réseaux	511
20.1 Arbres de Steiner	512
20.2 Algorithme de Robins-Zelikovsky	517
20.3 Conception de réseaux fiables	523
20.4 Un algorithme d'approximation primal-dual	526
20.5 Algorithme de Jain	534
Exercices	540
Références	543
21 Le problème du voyageur de commerce	547
21.1 Algorithmes d'approximation pour le PVC	547
21.2 Problème du voyageur de commerce euclidien	552
21.3 Méthodes locales	559
21.4 Polytope du voyageur de commerce	565
21.5 Bornes inférieures	571
21.6 Méthodes par séparation et évaluation	573
Exercices	576
Références	579
22 Le problème de localisation	583
22.1 Problème de localisation sans capacités	583
22.2 Solutions arrondies de la programmation linéaire	585
22.3 Méthodes primales-duales	587
22.4 Réduction d'échelle et augmentation gloutonne	593
22.5 Bornes du nombre d'installations	596
22.6 Recherche locale	599
22.7 Problèmes de localisation avec capacités	605
22.8 Problème de localisation universel	608
Exercices	614
Références	616
Notations	619
Index des noms d'auteurs	623
Index général	635

La Collection **IRIS** est composée d'ouvrages abordant les domaines de l'informatique, des réseaux et des télécommunications. Elle est destinée aux étudiants de l'enseignement supérieur (1^{er}, 2^e et 3^e cycles universitaires, classes préparatoires, écoles d'ingénieurs) ainsi qu'aux professionnels.

Chaque livre de la collection fait le point sur un aspect particulier. Les thèmes sont exposés par des auteurs ayant dispensé un enseignement sur le sujet pendant plusieurs années, ou, dans le cas de concepts émergents, par des chercheurs et des ingénieurs spécialistes du domaine.

L'informatique, les réseaux et les télécommunications constituant un champ scientifique et technologique en perpétuelle évolution, la Collection **IRIS** a pour vocation de clarifier les fondements de ces disciplines en proposant des ouvrages de référence mais aussi en présentant les développements récents à travers des ouvrages plus spécialisés.

La deuxième édition du livre **Optimisation combinatoire - Théorie et algorithmes** - décrit de manière détaillée les résultats théoriques et les algorithmes associés aux problèmes d'optimisation combinatoire. L'ouvrage présente des démonstrations concises mais complètes de nombreux résultats dont certains n'avaient jamais été exposés auparavant.

De la théorie des graphes à la programmation linéaire, des problèmes de couplage aux théories des matroïdes et de la complexité algorithmique, le propos couvre l'ensemble des thématiques classiques et contemporaines de ce champ qui compte parmi les plus actifs des mathématiques discrètes.

Cette traduction française de la cinquième édition anglaise intègre les dernières corrections des auteurs ainsi que des développements récents sur de nombreux sujets.

Véritable référence de l'optimisation combinatoire, ce livre s'adresse principalement aux étudiants en mathématiques et en informatique des 2^e et 3^e cycles universitaires, ainsi qu'aux ingénieurs et aux chercheurs confrontés à des problèmes d'optimisation.

Bernhard Korte est professeur de recherche opérationnelle à l'Université de Bonn et directeur de l'Institut de recherche pour les mathématiques discrètes de Bonn.

Jens Vygen est professeur de mathématiques discrètes à l'Université de Bonn.

